مدرسة راهبات المخلص الناصرة
בית ספר נזירות המושיע נצרת
SALVATORIAN SISTERS' SCHOOL NAZARETH
الناصرة ١٦١٠١ ص.ب. 121 P.O.BOX ☎ 04/6554674 🖷 04/6084337 נצרת 16101 NAZARETH
E.mail: school@sds-holyland.org www.sds-holyland.org

اسم الطالب: _____ الصف: _____ التاريخ: _____

ورقة عمل: المعادلات الكسريّة وهيئة معادلات مع دالّة تربيعيّة

الصف التاسع – 5 وحدات

تذكير

مجال التعويض في معادلة كسريّة هو جميع قيم المتغيّر التي لا تجعل أيّ مقام يساوي صفرًا. لتحديده نحلّل المقامات إلى عوامل.

بعد حلّ المعادلة نفحص كلّ حلّ: الحلّ الذي لا ينتمي إلى مجال التعويض غير مقبول.

هيئة معادلات من الدرجة الثانية نحلّها بالتعويض. كلّ حلّ للهيئة هو نقطة تقاطع بين الرسمين البيانيّين للمعادلتين.

سؤال 1: تحديد مجال التعويض

حلّل المقامات إلى عوامل، وحدّد مجال التعويض لكلّ معادلة، دون أن تحلّها.

أ) $\frac{5}{x-4}+\frac{2}{x}=1$

مجال التعويض: _____

ب) $\frac{x+1}{x^2-16}=\frac{3}{x+4}$

مجال التعويض: _____

ج) $\frac{7}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-3}$

مجال التعويض: _____

د) $\frac{2x}{x^2+6x+9}=1$

مجال التعويض: _____

هـ) $\frac{3}{x^2+4}=\frac{1}{2x}$

مجال التعويض: _____

و) $\frac{4}{x^3-x}=\frac{1}{x+1}$

مجال التعويض: _____

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

سؤال 2: حلّ معادلات كسريّة

حدّد مجال التعويض، ثمّ حلّ المعادلة، وافحص الحلول.

أ) $\frac{6}{x}+\frac{2}{x-2}=4$

ب) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{3}{4}$

ج) $\frac{x-4}{x-3}=\frac{3x}{x+1}$

د) $\frac{x-4}{x-2}+\frac{6}{x^2-3x+2}=2$

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

سؤال 3: حلول غير مقبولة

في كلّ معادلة: حدّد مجال التعويض، حلّ المعادلة، ثمّ بيّن أيّ حلّ غير مقبول ولماذا.

أ) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x+1}=\frac{6}{x^2-x-2}$

ب) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{6}{x^2-2x}=2$

ج) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+4}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$

د) $\frac{x}{x-3}-\frac{18}{x^2-9}=1$

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

سؤال 4: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة

أ) حلّ المعادلة الآتية هو:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

1) $x=2$
2) $x=-2$
3) $x=2$ أو $x=-2$
4) لا يوجد حلّ

علّل: _____

ب) مجال التعويض للمعادلة الآتية هو:

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{3}{x^2-1}$$

1) $x\neq 0$
2) $x\neq 1,\ x\neq -1$
3) $x\neq 0,\ x\neq 1$
4) $x\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -1$

سؤال 5: معادلة مع وسيط

معطاة المعادلة الآتية، حيث a عدد:

$$\frac{a}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1$$

أ) حدّد مجال التعويض للمعادلة.

ب) معطى أنّ $x=3$ حلّ للمعادلة. جد قيمة a .

ج) عوّض قيمة a التي وجدتها، وجد الحلّ الآخر للمعادلة. هل هو مقبول؟ علّل.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

سؤال 6: حلّ هيئة معادلات بالتعويض

حلّ كلّ هيئة من الهيئات الآتية، واكتب الحلول كأزواج مرتّبة.

أ) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$

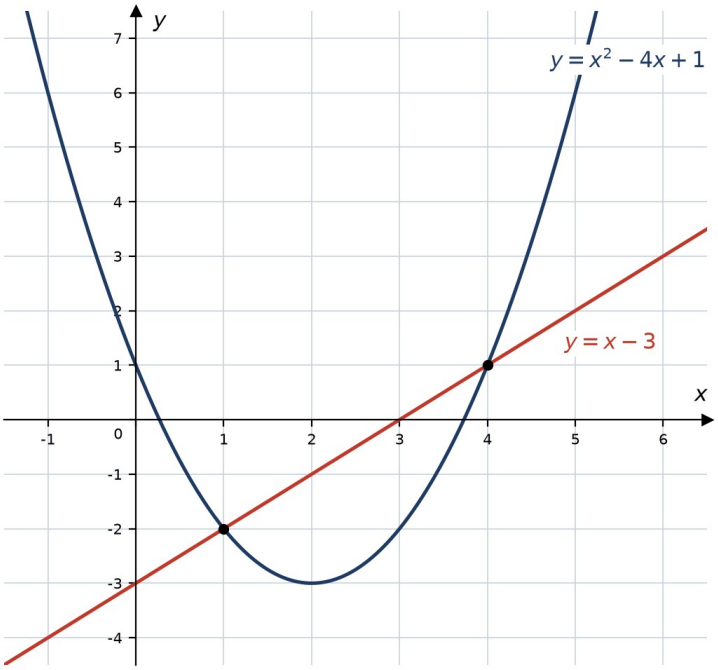
ج) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

د) $\begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + xy = 12 \end{cases}$

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

سؤال 7: تقاطع مستقيم وقطع مكافئ

في الرسم: القطع المكافئ $y = x^2 - 4x + 1$ والمستقيم $y = x - 3$



أ) اعتمادًا على الرسم، اكتب إحداثيّات نقطتي التقاطع: (_____ , _____) , (_____ , _____)

ب) حلّ هيئة المعادلات جبريًّا، وتحقّق من إجابتك في البند أ.

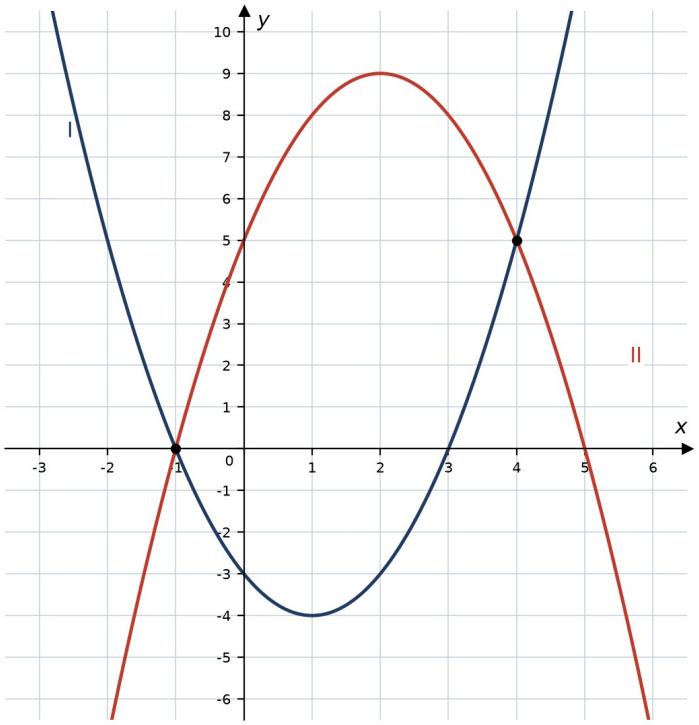
ج) لأيّ قيم x يكون القطع المكافئ تحت المستقيم؟

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

سؤال 8: تقاطع قطعين مكافئين

في الرسم: الرسمان البيانيّان I و II للدالّتين الآتيتين:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \qquad g(x) = -x^2 + 4x + 5$$



أ) أيّ رسم يمثّل كلّ دالّة؟ علّل بطريقتين.

ب) جد جبريًّا نقاط التقاطع بين الرسمين.

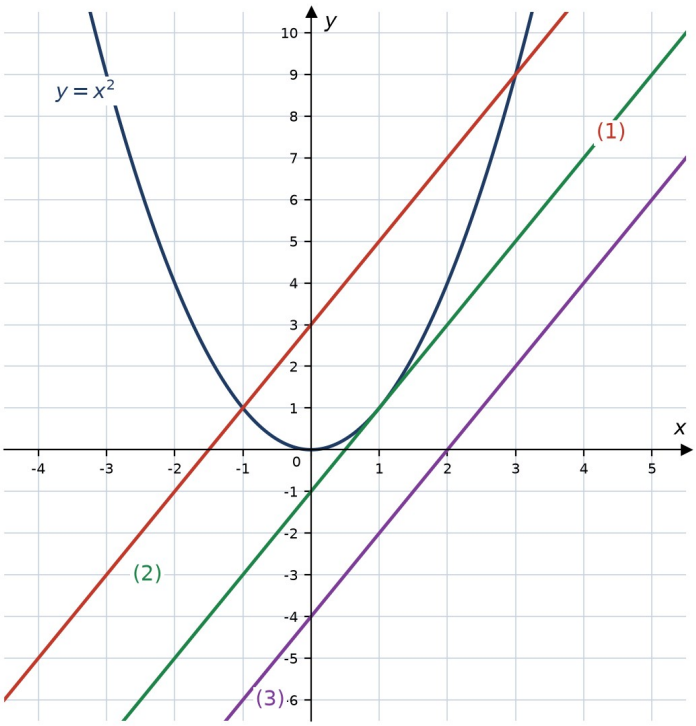
ج) اعتمادًا على البندين السابقين، لأيّ قيم x يتحقّق $f(x) > g(x)$ ؟

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

سؤال 9: عدد نقاط التقاطع

في الرسم: القطع المكافئ $y = x^2$ وثلاثة مستقيمات متوازية من الشكل $y = 2x + k$

(1) $y = 2x + 3$ (2) $y = 2x - 1$ (3) $y = 2x - 4$



أ) اعتمادًا على الرسم، كم نقطة تقاطع بين القطع المكافئ وكلّ مستقيم؟

ب) جد جبريًّا نقاط التقاطع بين القطع المكافئ والمستقيم (1).

ج) جد قيمة k التي يكون فيها للهيئة حلّ واحد فقط، وجد نقطة التماسّ.

د) لأيّ قيم k لا يوجد للهيئة حلّ؟

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

سؤال 10: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة

كم حلًّا للهيئة؟

أ) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x \end{cases}$

1) لا يوجد حلّ
2) حلّ واحد
3) حلّان
4) عدد لا نهائيّ من الحلول

علّل: _____

ب) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 8 \end{cases}$

1) لا يوجد حلّ
2) حلّ واحد
3) حلّان
4) عدد لا نهائيّ من الحلول

علّل: _____

سؤال 11: تحدٍّ

أ) حلّ الهيئة: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$

ب) المستقيم $y = mx$ يمرّ في نقطة الأصل، ويقطع القطع المكافئ الآتي في نقطة واحدة فقط:

$$y = x^2 - 2x + 4$$

جد جميع قيم m الممكنة، وجد نقطة التماسّ في كلّ حالة.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الإجابات

سؤال 1: تحديد مجال التعويض

أ) $x \neq 0,\ \ x \neq 4$

ب) $x^2 - 16 = (x-4)(x+4) \ \Rightarrow \ x \neq 4,\ \ x \neq -4$

ج) $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \ \Rightarrow \ x \neq 2,\ \ x \neq 3$

د) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \ \Rightarrow \ x \neq -3$

هـ) المقام الأوّل لا يساوي صفرًا أبدًا: $x^2 + 4 \geq 4 > 0 \ \Rightarrow \ x \neq 0$

و) $x^3 - x = x(x-1)(x+1) \ \Rightarrow \ x \neq 0,\ \ x \neq 1,\ \ x \neq -1$

سؤال 2: حلّ معادلات كسريّة

أ) $x \neq 0, 2: \ \ 6(x-2) + 2x = 4x(x-2) \ \Rightarrow \ 4x^2 - 16x + 12 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 - 4x + 3 = 0$

الحلّان مقبولان: $(x-1)(x-3) = 0 \ \Rightarrow \ x = 1 \ , \ x = 3$

ب) $x \neq \pm 1: \ \ 4(x+1) + 4(x-1) = 3(x^2-1) \ \Rightarrow \ 3x^2 - 8x - 3 = 0$

الحلّان مقبولان: $(3x+1)(x-3) = 0 \ \Rightarrow \ x = -\frac{1}{3} \ , \ x = 3$

ج) $x \neq 3,\ x \neq -1: \ \ (x-4)(x+1) = 3x(x-3)$

$x^2 - 3x - 4 = 3x^2 - 9x \ \Rightarrow \ 2x^2 - 6x + 4 = 0$

الحلّان مقبولان: $x^2 - 3x + 2 = 0 \ \Rightarrow \ (x-1)(x-2) = 0 \ \Rightarrow \ x = 1 \ , \ x = 2$

د) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \ \Rightarrow \ x \neq 1,\ x \neq 2$

$(x-4)(x-1) + 6 = 2(x-1)(x-2)$

$x^2 - 5x + 10 = 2x^2 - 6x + 4 \ \Rightarrow \ x^2 - x - 6 = 0$

الحلّان مقبولان: $(x-3)(x+2) = 0 \ \Rightarrow \ x = 3 \ , \ x = -2$

سؤال 3: حلول غير مقبولة

أ) $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \ \Rightarrow \ x \neq 2,\ x \neq -1$

$x(x+1) + 3(x-2) = 6 \ \Rightarrow \ x^2 + 4x - 12 = 0$

$(x+6)(x-2) = 0 \ \Rightarrow \ x = -6 \ , \ x = 2$

$x = 2$ غير مقبول لأنّه يجعل أحد المقامات صفرًا.

الحلّ: $x = -6$

ب) $x^2 - 2x = x(x-2) \ \Rightarrow \ x \neq 0,\ x \neq 2$

$x(x+1) - 6 = 2x(x-2) \ \Rightarrow \ x^2 - 5x + 6 = 0 \ \Rightarrow \ x = 2 \ , \ x = 3$

$x = 2$ غير مقبول لأنّه يجعل أحد المقامات صفرًا.

الحلّ: $x = 3$

ج) $x \neq \pm 2: \ \ x(x-2) + (x+4)(x+2) = 8 \ \Rightarrow \ 2x^2 + 4x = 0$

$2x(x+2) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0 \ , \ x = -2$

$x = -2$ غير مقبول لأنّه يجعل أحد المقامات صفرًا.

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

الحلّ: $x=0$

د) $x\neq\pm3:\ \ x(x+3)-18=x^2-9\ \Rightarrow\ 3x=9\ \Rightarrow\ x=3$

$x=3$ غير مقبول لأنّه خارج مجال التعويض، لذلك لا يوجد حلّ للمعادلة.

سؤال 4: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة

أ) الإجابة 4 لا يوجد حلّ، لأنّ $x\neq2:\ \ \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2=4\ \Rightarrow\ x=2$

لكنّ x = 2 خارج مجال التعويض، لذلك لا يوجد حلّ.

ب) الإجابة 4: $x^2-x=x(x-1)\ ,\ \ x^2-1=(x-1)(x+1)\ \Rightarrow\ x\neq0,\ 1,\ -1$

سؤال 5: معادلة مع وسيط

أ) $x\neq1\ ,\ \ x\neq-1$

ب) $\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{4}=1\ \Rightarrow\ \dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{4}\ \Rightarrow\ a=\dfrac{3}{2}$

ج) $\dfrac{3}{2(x-1)}+\dfrac{1}{x+1}=1\ \ \ |\cdot2(x^2-1)\ \ \ 3(x+1)+2(x-1)=2x^2-2$

$2x^2-5x-3=0\ \Rightarrow\ (2x+1)(x-3)=0\ \Rightarrow\ x=3\ ,\ x=-\dfrac{1}{2}$

الحلّ الآخر: $x=-\dfrac{1}{2}$

وهو مقبول لأنّه ينتمي إلى مجال التعويض.

سؤال 6: حلّ هيئة معادلات بالتعويض

أ) $x^2-2x-3=x-3\ \Rightarrow\ x^2-3x=0\ \Rightarrow\ x(x-3)=0\ \Rightarrow\ x=0\ ,\ x=3$

الحلول: $(0,\ -3)\ ,\ \ (3,\ 0)$

ب) $y=7-x:\ \ x(7-x)=12\ \Rightarrow\ x^2-7x+12=0\ \Rightarrow\ x=3\ ,\ x=4$

الحلول: $(3,\ 4)\ ,\ \ (4,\ 3)$

ج) $x=y+1:\ \ (y+1)^2+y^2=25\ \Rightarrow\ 2y^2+2y-24=0$

$y^2+y-12=0\ \Rightarrow\ y=3\ ,\ y=-4$

الحلول: $(4,\ 3)\ ,\ \ (-3,\ -4)$

د) $x^2+x(x+2)=12\ \Rightarrow\ 2x^2+2x-12=0\ \Rightarrow\ x^2+x-6=0\ \Rightarrow\ x=2\ ,\ x=-3$

الحلول: $(2,\ 4)\ ,\ \ (-3,\ -1)$

سؤال 7: تقاطع مستقيم وقطع مكافئ

أ) $(1,\ -2)\ ,\ \ (4,\ 1)$

ب) $x^2-4x+1=x-3\ \Rightarrow\ x^2-5x+4=0\ \Rightarrow\ (x-1)(x-4)=0\ \Rightarrow\ x=1\ ,\ x=4$

نعوّض في معادلة المستقيم: $x=1\Rightarrow y=-2\ ;\ \ x=4\Rightarrow y=1$

ج) القطع المكافئ تحت المستقيم بين نقطتي التقاطع: $1<x<4$

© المعلّمة كرستين عيد برانسي

سؤال 8: تقاطع قطعين مكافئين

أ) الرسم I يمثّل الدالّة f ، والرسم II يمثّل الدالّة g .

التعليل الأوّل، نقطة التقاطع مع محور الصادات: $g(0)=5 \quad , \quad f(0)=-3$

التعليل الثاني: معامل الحدّ التربيعيّ في f موجب (الفتحة إلى أعلى)، وفي g سالب (الفتحة إلى أسفل).

ب) $x^2-2x-3=-x^2+4x+5 \Rightarrow 2x^2-6x-8=0$

$x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow x=4\ ,\ x=-1$

$f(4)=16-8-3=5\ ,\ \ f(-1)=1+2-3=0 \ \Rightarrow\ (4,\ 5)\ ,\ (-1,\ 0)$

ج) الرسم I فوق الرسم II خارج نقطتي التقاطع: $x<-1 \quad , \quad x>4$

سؤال 9: عدد نقاط التقاطع

أ) المستقيم الأوّل: نقطتا تقاطع.

المستقيم الثاني: نقطة واحدة (المستقيم مماسّ للقطع المكافئ).

المستقيم الثالث لا توجد نقاط تقاطع.

ب) $x^2=2x+3 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow (3,\ 9)\ ,\ (-1,\ 1)$

ج) $x^2-2x-k=0:\ \ \Delta=4+4k=0 \Rightarrow k=-1$

نقطة التماسّ: $x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1\ ,\ y=1 \ \Rightarrow\ (1,\ 1)$

د) $\Delta=4+4k<0 \Rightarrow k<-1$

سؤال 10: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة

أ) الإجابة 1 لا يوجد حلّ، لأنّ $x^2+1=x \Rightarrow x^2-x+1=0\ ,\ \ \Delta=1-4=-3<0$

ب) الإجابة 3: حلّان، لأنّ $x^2=-x^2+8 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow (2,\ 4)\ ,\ (-2,\ 4)$

سؤال 11: تحدٍّ

أ) $x\neq 0,\ \ y\neq 0:\ \ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{5}{xy}=\dfrac{5}{6} \Rightarrow xy=6$

$y=5-x:\ \ x(5-x)=6 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow (2,\ 3)\ ,\ (3,\ 2)$

ب) $x^2-2x+4=mx \Rightarrow x^2-(2+m)x+4=0\ ,\ \ \Delta=(2+m)^2-16=0$

$2+m=\pm 4 \Rightarrow m=2 \quad , \quad m=-6$

$m=2:\ \ x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,\ 4)$

$m=-6:\ \ x^2+4x+4=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2,\ 12)$

© المعلّمة كرستين عيد برانسي